Programme de colle n°22

semaine du 25 au 29 mars

Notions vues en cours

Chapitre 24 : Développements limités *(en complément de la semaine dernière)* :

- (Vu en exercice) : calcul de limites en utilisant les DL
- Étude du signe local d'une fonction (DL sous forme normalisée puis équivalent)
- Avec un DL, obtention de l'équation d'une tangente et position relative de la courbe par rapport à sa tangente
- Conditions d'optimalité du second ordre : conditions nécessaires, conditions suffisantes
- (Vu en exercice :) un équivalent de $f(x) - f(a)$ quand x tend vers a permet de déduire si a est un maximum ou minimum local
- Asymptote oblique en $\pm\infty$: définition, méthode de détermination
- (Vu en exercice :) DL d'une fonction réciproque (sans expression explicite), développement asymptotique d'une suite implicite

La notion de développement asymptotique, si abordée, doit être assortie d'indications et réservée en dernière partie de colle.

Chapitre 25 : Espaces vectoriels

- $\mathbb{K}$-espace vectoriel : définition, vecteur nul 0_E, règles de calcul avec $0_{\mathbb{K}}, 0_E, -$
- Exemples fondamentaux d'e.v. : $\mathbb{K}$, $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{K}^{\mathbb{K}}$, $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$ avec $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}(X)$, $\mathbb{K}^{\Omega}$ avec Ω un ensemble quelconque
- Un $\mathbb{C}$-e.v. peut être vu comme un $\mathbb{R}$-e.v., espace vectoriel produit $E_1 \times \cdots \times E_n$
- Combinaison linéaire d'une famille *finie* de vecteurs (les CL de familles infinies seront vues ultérieurement)
- Sous-espace vectoriel : définition, caractérisation, s.e.v. triviaux, stabilité par intersection (finie ou infinie)

Questions de cours

Question libre. Une question de cours sans démonstration choisie par l'examinateur. Cette question est basée sur un ou plusieurs énoncés encadrés tirés du polycopié (définition, propriété, corollaire, théorème SAUF méthode et SAUF les encadrés “non-officiel”), parmi les chapitres **22 à 24**. *Des exemples de questions figurent en page suivante.*

Question fixée. *Sauf mention contraire, les démonstrations sont à connaitre.*

1. Conditions d'optimalité du second ordre : énoncé uniquement Chapitre 24, Propriété 24.13
2. Définition d'un espace vectoriel, puis sans démonstration : une caractérisation pour qu'un ensemble soit un s.e.v. (on ne demande pas la définition d'un s.e.v.) Chapitre 25, Définition 25.1 et Propriété 25.8
3. L'intersection d'une famille (finie ou infinie) de s.e.v. est un s.e.v. Chapitre 25, Proposition 25.10

Exemples de questions libres :

Chapitre 22 :

- Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On suppose que P admet une racine complexe non réelle α. Donner une autre racine de P. Que peut-on dire de plus ?
- Quels sont les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$?
- Soit P le polynôme d'interpolation de Lagrange qui passe par n points donnés. Donner le degré de P en fonction de n. Quel est le polynôme qui passe par les points $(-1, 0)$ et $(0, 1)$?
- Soit $\dfrac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$. À quelle condition peut-on dire que cette fraction est irréductible ? Comment faire pour s'y ramener ?
- Quelle est la définition d'un pôle d'une fraction rationnelle $\dfrac{A}{B}$?

Chapitre 23 :

- Donner la définition de "f est dominée par g au voisinage de a" ainsi que sa notation. Quelle est la condition sur g pour que ceci ait un sens ?
- Soit les assertions $P : f(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x))$ et $Q : f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$. Est-ce que $P \implies Q$? Est-ce que $Q \implies P$? Justifier.
- Soit $a \in \mathbb{R}$. Donner un équivalent de $x^2 + ax$ lorsque x tend vers $+\infty$ et quand x tend vers 0, en distinguant bien chaque cas.
- Donner un équivalent de $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} - 1$ quand x tend vers 0.
- Soit f, g, u trois fonctions. On suppose que $f \underset{a}{\sim} g$. Donner une condition nécessaire sur u qui permet d'assurer que $f \circ u \underset{0}{\sim} g \circ u$.

Chapitre 24 :

- Donner la forme générale d'un DL à l'ordre n en un point a d'une fonction f (en supposant qu'un tel DL existe).
- Si f admet un DL à l'ordre 0 en a, que peut-on déduire sur $\lim\limits_{x\to a} f(x)$?
- Énoncer la formule de Taylor-Young (on pourra préciser les hypothèses à l'oral).
- Si $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k + \underset{x\to a}{o}((x-a)^n)$, quel DL peut-on en déduire pour une primitive F de f ?
- Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On suppose que $f(x) = \alpha + \beta(x-a) + (x-a)^2 + \underset{x\to a}{o}\big((x-a)^2\big)$. Donner un équivalent simple de $f(x)$ quand x tend vers a.